**23 КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АТОМА ВОДОРОДА.**

**ВОПРОС В БИЛЕТЕ ОТВЕЧАТЬ ПО ПАРАГРАФУ 24!**

**ЭТОТ ПАРАГРАФ МОЖНО НЕ ЧИТАТЬ!**

Гамильтониан уравнения Шредингера

для атома водорода и водородоподобных ионов имеет вид

Так как потенциальная энергия зависит только от , удобно решать задачу в сферической системе координат, в которой гамильтониан запишется в виде

Оператор квадрата момента импульса равен

Следовательно оператор Гамильтона можно представить в виде

Легко видеть, что , и

взаимно коммутируют. Следовательно, можно поставить задачу на отыскание собственных функций и собственных значений для этих операторов одновременно

Общие собственные функции и имеют вид

Подставим это выражение в УШ . После преобразований приходим к дифференциальному уравнению для :

Далее будем рассматривать случай . Введем обозначения

и новую переменную

Уравнение для перепишется

Найдем асимптотическое поведение при. В этом случае членами пропорциональными в уравнении можно пренебречь, в результате чего уравнение принимает вид

Следовательно, при

Решение со знаком плюс в экспоненте из-за требования конечности пси-функции (стандартные условия).

При главными членами уравнения являются члены с максимальной степенью в знаменателе. Поэтому при

Пусть . Подставив это выражение в уравнение, получаем квадратное уравнение

Его решения

Решение с следует отбросить, т.к. при оно стремится к бесконечности. Учитывая поведение при и при , точное решение уравнения будем искать в виде

Подставив это выражение в уравнение для , после преобразований приходим к уравнению для неизвестной функции

Решение ищем в виде ряда

Подставив ряд в уравнение и перегруппировав члены, получаем

Приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях в этом ряде находим рекуррентные соотношения для определения неизвестных коэффициентов

Отношение соседних коэффициентов степенного ряда

совпадает с отношением коэффициентов разложения функции

Следовательно, при больших

и не удовлетворяет стандартным условиям. Стандартные условия будут выполняться, если ряд для обрывается при некотором значении и ряд становится полиномом. Тогда его рост в подавляется экспонентой. Для этого потребуем:

Тогда получаем для полином. Воспользуемся выражениями для и :

Следовательно, энергия атома водорода при отрицательных значениях имеет дискретный спектр.

Ее значения определяются главным квантовым числом

Полиномы, коэффициенты которых определяются полученными рекуррентными соотношениями, называются **обобщенными полиномами Лагерра**. Функции выражаются через них следующим образом:

Индекс указывает на то, что вид определяется выбором значений этих двух квантовых чисел. Радиальные функции

зависят от главного квантового числа (определяет возможные значения энергии ) и орбитального (азимутального) квантового числа (определяет квадрат момента импульса ). Из выражения следует, что при заданном значении азимутальное квантовое число может принимать значения 0, 1, 2, …, – коэффициент нормировки.

Пси-функция, описывающая состояние с определенными значениями энергии , квадрата момента импульса =, проекции момента импульса :

Переменная

Уровни энергии вырождены. Уровню с главным квантовым числом принадлежит число различных линейно независимых состояний

Кратность вырождения